K. Semenov

Conditions of the existence of Backlund transformations for the evolution-type PDEs of the third order with one dimensional variable

Evolution-type partial differential equations of the third order with one dimensional variable and their associated geometrical structures are studied. The invariant interpretation in terms of differential geometry is given to the Backlund transformations and Backlud mappings. The conditions for such equations to possess these transformations and mappings are found.

Key words: evolution-type equations, connections in fibre bundles, Backlund transformations, Backlund mappings, Backlund connection.

УДК 514.764.25

С. Е. Степанов, И. И. Цыганок
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
s.e.stepanov@mail.ru
Й. Микеш
Оломоуцкий университет, Оломоуц, Чехия

Теорема лиувиллева типа о проективном отображении полного риманова многообразия

Доказывается «теорема исчезновения» для проективного диффеоморфизма полного риманова многообразия. При доказательстве будет использована известная L^p-лиувиллева теорема Яу об ограниченных функциях на полных римановых многообразиях.

Ключевые слова: полное риманово многообразие, проективный диффеоморфизм.

Введение

Теории проективных или по другой терминологии геодезических отображений римановых многообразий более ста лет, тем не менее исследование этих отображений актуально и в настоящее время (см., например: [1—3]).

Так, например, в статье [4] было доказано, что проективный диффеоморфизм $f:(M,g)\to(M,\bar{g})$ полного риманова многообразия (M,g), который удовлетворяет условию $f^*\overline{Ric}\le Ric$ для тензоров Риччи метрик $\bar{g}$ и g соответственно, является аффинным отображением.

В настоящей статье мы докажем теорему, дополняющую данный результат. Для доказательства будет использована известная L^p-лиувиллева теорема Яу (см. [5]). При этом диффеоморфизм многообразий одной и той же размерности, который задается в общей теории сопоставлением точек с одинаковыми локальными координатами, мы заменим тождественным отображением многообразия на себя.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в статье [6].

1. Проективные отображения полных римановых многообразий

Две римановы метрики g и $\bar{g}$ на n-мерном связном многообразии M называются *геодезическими* или, по другой терминологии, *проективно-эквивалентными*, если тождественное отображение Id: $(M, g) \to (M,\bar{g})$ является *геодезическим* или, иначе, *проективным* (см. [7]). В этом случае каждая геодезическая метрики g является (с точностью до параметризации) геодезической метрики $\bar{g}$. Напомним также, что метрики g и $\bar{g}$

называются *аффинно эквивалентными*, если их связности Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ совпадают. В этом случае тождественное отображение Id: $(M, g) \to (M, \overline{g})$ является *аффинным* или, по другой терминологии, *вполне геодезическим* (см.: [8]).

Хорошо известно, что метрики g и $\overline{g}$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются уравнения (см.: [9, с. 163])

$$\begin{aligned}&(\nabla_Z \overline{g})(X,Y) = \\ &= 2\overline{g}(X,Y)d\psi(Z) + \overline{g}(X,Z)d\psi(Y) + \overline{g}(Y,Z)d\psi(X)\end{aligned} \tag{1}$$

для произвольных $X, Y, Z \in C^{\infty}TM$ и

$$d\psi = \frac{1}{2(n+1)} d\ln\left(\frac{det\,\overline{g}}{\det g}\right). \tag{2}$$

Обозначим через dV_g и $dV_{\overline{g}}$ *элементы* или, по другой терминологии, *n-формы объемов* метрик g и $\overline{g}$, которые в локальных координатах $x^1,...,x^n$ определяются равенствами $dV_g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ и $dV_{\overline{g}} = \sqrt{det(\overline{g}_{ij})}\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ соответственно (см.: [10, с. 260]). Тогда из (2) заключаем, что

$$\psi = \frac{1}{n+1}\ln\left(C\left(dV_{\overline{g}}/dV_g\right)\right) \tag{3}$$

для произвольной постоянной $C > 0$.

Замечание. Напомним, что для любого связного многообразия M существует ориентируемое многообразие $\tilde{M}$, которое двулистно накрывает M (см.: [11]). Это позволяет нам рассматривать формы объема dV_g на M и интегрировать по многообразию M в случае, если оно ориентировано.

Как следствие уравнений (1) имеем равенства (см.: [9, с. 165])

$$\overline{Ric} = Ric + (n-1)(\nabla d\psi - d\psi \otimes d\psi) \tag{4}$$

для тензоров Риччи Ricи $\overline{Ric}$метрик g и $\overline{g}$ соответственно. Если свернуть левую и правую части (3) с компонентами тензора $g^{-1} = \left(g^{ij}\right)$, то получим уравнение Пуассона вида

$$\Delta\psi = \frac{1}{n-1}\left(\overline{s}^{*} - s\right) + \| d\psi \|^{2}, \tag{5}$$

где $\Delta\psi = trace_g(\nabla d\psi)$— оператор Лапласа — Бельтрами скалярной функции (3), $\| d\psi \|^{2} = g(d\psi, d\psi)$, $s = trace_g Ric$ — скалярная кривизна метрики g и $\overline{s}^{*} = trace_g\, \overline{Ric}$ — скалярный инвариант на M.

2. Основной результат

Яу доказал [5], что уравнение Пуассона $\Delta \log f = u$ не имеет отличных от постоянных L^p-решений для всех $0 < p < \infty$ на полном римановом многообразии (M, g) для ограниченной снизу функции u такой, что $0 < \int_M u\, dV_g \leq \infty$. В нашем случае $u = \frac{n+1}{n-1}\left(\overline{s}^{*} - s\right) + (n+1)\| d\psi \|^{2}$, где скалярная функция $\| d\psi \|^{2} = g(d\psi, d\psi) \geq 0$, а потому она ограничена снизу на M. Потребуем дополнительно, чтобы разность $s^{*} - s$ была ограниченной снизу функцией и при этом $0 < \int_M \left(s^{*} - s\right) dVol_g \leq \infty$, тогда функция (3) по теореме Яу будет постоянной, если $\left(dV_{\overline{g}} / dV_g\right) \in L^p(M, g)$ для некоторого $0 < p < \infty$. В этом случае из (1) последует, что $\nabla \overline{g} = 0$, то есть метрики g и $\overline{g}$ являются *аффинно эквивалентными.* А потому справедлива

Теорема. *Пусть M — связное некомпактное многообразие, аg и $\overline{g}$ будут проективно эквивалентными метриками на Mтакими, что g — полная риманова метрика и* $\left(dV_{\overline{g}} / dV_g\right) \in$ $\in L^p\left(M, g\right)$ *для некоторого* $0 < p < \infty$. *Если разность* $\overline{s}^* - s$ *будет ограниченной снизу функцией на M и при этом* $0 < \int_M \left(s^* - s\right) dVol_g \leq \infty$, *то с необходимостью g и $\overline{g}$ — аффинно эквивалентные метрики.*

Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку исследований (грант №16-01-00053а).

Список литературы

1. *Hiterleitner I.* On holomorphically projective mappings of e-Kähler manifolds // Archivum Mathematicum. 2012. Vol. 48. P. 333—338.
2. *Matveev V. S.* Geodesically equivalent metric in general relativity // Journal of Geometry and Physics. 2012. Vol. 62, Iss. 3. P. 675—691.
3. *Mikesh J., Tsyganok I. I., Stepanova E. S.* A geodesic mapping and its field of symmetric linear endomorphisms // Differential Geometry and its Applications. 2014. Vol. 35. P. 44—49.
4. *Chen X., Shen Z.* A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry// Annals of Global Analysis and Geometry. 2003. Vol. 23. P. 141—155.
5. *Yau S.-T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. Vol. 25, № 7. P. 659—670.
6. *Александрова И. А., Микеш Й., Степанов С. Е., Цыганок И. И.* Теоремы лиувиллева типа в теории отображений полных римановых многообразий // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика, 2015. Т. 99, вып. 5. С. 1—8.
7. *Mikeš J., Vanžurová A., HiterleitnerI.* Geodesic mappings and some generalizations. Olomouc: OlomoucUniv. Press. 2009.
8. *Vilms J.* Totally geodesic maps // J. Differential Geometry. 1970. Vol. 4. P. 73—79.

9. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.
10. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1991. Т. 1.
11. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. Семестр IV. М., 1988. С. 167.

S. Stepanov, I. Tsyganok, J. Mikeš

Liouville type theoremabout projective mapping of complete Riemannian manifold

In the present paper we prove a vanishing theorem for projective diffeomorphisms of a Riemannian complete manifolds. We will use the well-known Yau Liouville type theorem for complete Riemannian manifolds.

*Key words:*complete Riemannian manifold, projective diffeomorphism.

УДК 514.75

М.А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma@math.asu.ru

Инверсия скрещенного колпака и римской поверхности

Если вдоль некоторой замкнутой кривой на поверхности локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мёбиуса. К односторонним поверхностям относится также скрещенный колпак, римская поверхность, скрещенный колпак с крышкой являются моде-